Universidad Gerardo Barrios

Facultad de Ciencia y Tecnología

ANÁLISIS, SIMULACIÓN Y OPTIMIZACIÓN DE UN SISTEMA USANDO TEORÍA DE COLAS: COLECTURÍA, UNIDAD FINANCIERA, UNIVERSIDAD GERARDO BARRIOS, SAN MIGUEL.

Autor: Lic. Víctor Edgardo López Sandoval

1. Clasificación del Proyecto

Se presenta el proyecto: *ANÁLISIS, SIMULACIÓN Y OPTIMIZACIÓN DE UN SISTEMA USANDO TEORÍA DE COLAS: COLECTURÍA, UNIDAD FINANCIERA, UNIVERSIDAD GERARDO BARRIOS, SAN MIGUEL*, el cual tiene la siguiente naturaleza:

En primer lugar, se concibe como un proyecto de *Investigación Aplicada*, de índole *observacional y transversal*, que pretende brindar un análisis del comportamiento de un sistema en específico y brindar recomendaciones para su mejoría.

Por otra parte, es un proyecto de *servicios*, ya que pretende prestar servicios de carácter personal y técnico, mediante el ejercicio profesional individual.

A su vez, es un proyecto de tamaño *pequeño*, que se desarrolla de forma *local* en la Universidad Gerardo Barrios, sede San Miguel, con una *ejecución de índole privada* del mismo, el cual se ejecuta con fondos institucionales.

2. Resumen

Se realiza la evaluación del sistema de Colecturía de la Universidad Gerardo Barrios, sede San Miguel. Se desarrolla el proyecto en tres fases:

1. **Análisis del sistema de colecturía en la UGB:** Se utiliza Teoría de Colas para evaluar el sistema de colecturía. Se define el modelo matemático a seguir, luego se realizan procesos estadísticos para calcular la probabilidad de que el sistema esté ocioso o vacío, el número esperado en la fila y en el sistema, así como también los tiempos de espera en el mismo.

2. **Simulación del sistema:** Se utilizan programas especializados en simulación para observar y modelar el comportamiento del sistema.

3. **Optimización del sistema:** Se simulan variantes en el sistema, de las cuáles se pretende optimizar el tiempo de espera en el proceso de colecturía y optimizar los costos.

Índice

Índice de figuras

3. Introducción

La investigación que se desarrolla en este documento, se refiere a la aplicación de teoría de colas (o filas) de espera, en un caso real, como lo es el sistema de Colecturía de la Universidad Gerardo Barrios. Pero, más allá del análisis matemático del sistema, se pretende realizar simulaciones del comportamiento del mismo a través de software especializado para ello. Una vez hecho el análisis y las simulaciones necesarias, es importante brindar recomendaciones de mejora y optimización en el caso que fuese necesario.

El sistema de Colecturía de la UGB tiene características especiales, ya que brinda servicios a la comunidad estudiantil en términos de pagos de aranceles y colegiaturas, pero también brinda servicios de pago de viáticos y canje de cheques a empleados y personas que brindan diferentes tipos de servicios.

La diferencia más marcada, es que existen fechas en específico en que generalmente el sistema se satura, por ejemplo al principio de cada ciclo cuando los estudiantes inscriben materias. Es decir, que en esos lapsos de tiempo el sistema se satura y sobrepasa el límite de atención de los servicios. Mientras que fuera de esas fechas el sistema pasa libre en cierto porcentaje.

Para analizar de forma adecuada el sistema, es necesario comprender como se comportan algunas variables de interés, como por ejemplo la distribución de llegada de los clientes, los tiempos de servicio de los cajeros, etc. Cada una de estas variables se mencionan en la parte de análisis del sistema y se cuantifican con el propósito de proponer un modelo matemático, el cual pretende mediante las herramientas analíticas, lo más fiel a la realidad posible.

La investigación se realiza con el interés de conocer de forma analítica y metódica el funcionamiento del sistema, reconociendo sus puntos favorables, sin el ánimo de criticar los métodos de atención a los clientes, sino, con el espíritu de fortalecer el proceso mediante una evaluación objetiva, brindando recomendaciones desde el punto de vista de la matemática.

En el marco de la metodología usada para la investigación, se desgloza en tres fases necesarias para cada uno de los momentos de la investigación.

En primer lugar, se usarán herramientas estocásticas, relacionadas a la estadística para la captura de datos, combinadas con teoría de colas para producir un modelo que sirva como base para el análisis y descripción del mismo, se deja en claro que el principal interés es observar el sistema en fechas pico, donde la acumulación de clientes es más grande.

En segundo lugar se plantea el uso de programas para la simulación de procesos, el cual ayudara a evaluar de forma indirecta múltiples resultados y soluciones.

Por último se pretenden analizar los resultados y seleccionar las soluciones óptimas para la mejoría del sistema.

4. Justificación

En toda institución de servicios, aparecen procesos en los cuales se tienen que hacer filas o colas de espera, la Universidad Gerardo Barrios, no es la excepción. La colecturía de la Universidad, brinda servicios para el pago de aranceles, cuotas mensuales, matrículas, seguro, entrega de cheques, etc. Todos estos procesos, especialmente al inicio de ciclo, generan una saturación del sistema. Si bien es cierto, existe el pago de aranceles universitarios en los bancos externos o mediante procesos en línea, siempre hay bastante afluencia de estudiantes y el sistema se satura, como resultado de esto, los usuarios pasan horas haciendo fila, lo cual trae malestar e inconformidad en los estudiantes.

Por estos motivos, es necesario analizar el sistema y obtener una medición formal del proceso que se lleva en colecturía, así mismo, realizar una simulación para apreciar de forma más integral el fenómeno de las líneas de espera, con el objeto de brindar opciones y recomendaciones para mejorar el proceso y optimizar el sistema.

El proceso de análisis debe ir bien fundamentado, por lo cual se proponen métodos matemáticos, como la estadística inferencial y la teoría de colas, con el fin de construir un modelo que se apegue de la mejor forma a las características del sistema.

En cuánto a la simulación, se pretende mostrar las características y resultados del modelo simulado a través del Software Promodel Student, en donde se podrá apreciar de mejor manera el comportamiento del sistema objeto de estudio.

La optimización se hará tomando en cuenta varios factores, entre ellos, los costos en que incurre la Universidad al contratar más servidores, así como también la minimización de los tiempos de espera en la fila de espera al hacer un proceso en colecturía.

Todo esto, con el objeto de mejorar el servicio al punto de equilibrio y percibir una satisfacción por parte de las personas que hacen uso del sistema para diferentes procesos. A largo plazo, se beneficia a la comunidad Universitaria en general, ya que los estudiantes pueden hacer sus pagos de forma más eficiente, los docentes y personal administrativo pueden cobrar sus cheques de forma más inmediata y la institución brinda una mejor atención reduciendo sus costos.

Además, ésta investigación servirá como precedente, para futuros proyectos donde se necesite optimizar un servicio de éste tipo, se puede tomar el desarrollo que aquí se hace y aplicarse de forma análoga en cualquier otro sistema que involucre la formación de filas de espera para hacer algún determinado trámite o proceso.

5. Objetivos

5.1. General

- Analizar, simular y optimizar el sistema de colecturía de la Universidad Gerardo Barrios, sede San Miguel para brindar recomendaciones de mejora en sus procesos.

5.2. Específicos

1. Proponer un modelo para el estudio del sistema de colecturía en la UGB.
2. Utilizar la teoría de colas para analizar el sistema de colecturía en la UGB.
3. Simular los procesos que se llevan a cabo en colecturía mediante algún software computacional.
4. Optimizar el sistema de colecturía haciendo uso de la teoría de colas y simulaciones.
5. Brindar recomendaciones para mejorar los tiempos de espera y reducir los costos.

6. Metodología de Trabajo

El proyecto de investigación contempla tres fases:

1. **Análisis.**
2. **Simulación.**
3. **Optimización.**

A continuación, se detalla la metodología a seguir para cada una de las fases del proyecto.

Se recomienda la lectura de [4].

6.1. Fase de Análisis

La fase de Análisis es la más importante, ya que constituye la base del proyecto de investigación, donde se realiza la identificación de factores o variables críticas o claves del sistema, las necesidades, demandas y se hace la recopilación de datos para las diversas mediciones formales.

Ésta fase, a su vez, se desarrolla en las siguientes partes:

1. Diagnóstico del sistema.
2. Recopilación de Datos.
3. Construcción y Definición del Modelo.

6.1.1. Diagnóstico.

Para desarrollar el *diagnóstico* del sistema, se llevará a cabo una reunión técnica con el Jefe de la Unidad Financiera de la Universidad Gerardo Barrios, sede San Miguel, donde se pretende recolectar información de vital importancia, como por ejemplo, la población a la que se atiende, la disposición en que están organizadas las filas de espera, la cantidad de servidores que se utilizan, el software que se usa para la generación de facturas, y otro tipo de variables y condiciones que son de interés para la construcción del modelo.

Corresponde a la fase de diagnóstico, considerar el máximo de variables que intervienen en función del contexto global del sistema. De ésta forma, la finalidad de hacer un diagnóstico del sistema, es descubrir las características fundamentales de la realidad con respecto a los procesos que se llevan a cabo en la Unidad de Colecturía.

6.1.2. Análisis Estadístico

Después de la fase de diagnóstico, se llevará a cabo *la recopilación de datos*.

Con la información obtenida, utilizando métodos estadísticos, se definirá el *universo* de estudio, la *población* de estudio, la *muestra* que se va utilizar y el *método de muestreo*. Luego se procederá a recopilar los datos del sistema a través de un instrumento elaborado por el investigador, para posteriormente verificar el cumplimiento de condiciones del modelo y la asignación de valores a las diferentes variables a considerar en el sistema.

Para analizar el desempeño del sistema, se usará como apoyo el software TORA.

6.1.3. Definición y Análisis del Modelo.

Para éste apartado, se usará la Teoría de Colas como base. Por lo tanto, se vuelve necesario desarrollar ésta teoría, para luego elegir el modelo que mejor se apegue al sistema objeto de nuestra investigación, utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior.

Luego de construir el modelo a usar, se verificará el cumplimiento de las condiciones del modelo y se definirán las variables de interés en el análisis. Se harán las mediciones y cálculos necesarios, con el objeto de brindar una descripción y un análisis formal del estado actual del sistema.

6.2. Fase de Simulación

Una vez construido el modelo para el sistema, se desarrollará una simulación del mismo, haciendo uso del software Promodel Student. La simulación, permitirá adquirir experiencia de manera rápida sin ningún costo y sin poner en riesgo la productividad del sistema. Podemos modificar variables, implementar alternativas y hacer modificaciones al sistema sin afectar al sistema real, lo cual es de gran utilidad en la toma de decisiones y elaboración de resultados y recomendaciones.

6.3. Fase de Optimización

Para mejorar el desempeño de un sistema, se debe hablar de optimización, esto se puede lograr buscando un equilibrio entre la tasa de llegada y la tasa de servicio, pero se necesita conocer el modelo a fondo para aportar una solución viable al problema del tiempo de espera.

Esta fase se llevará a cabo usando herramientas matemáticas de análisis y métodos de optimización, investigación de operaciones y técnicas estadísticas.

7. Desarrollo del Análisis

7.1. Teoría de Colas

Un sistema de colas se puede describir como sigue. Un conjunto de *clientes* llega a un sistema buscando un servicio, esperan si este no es inmediato, y abandonan el sistema una vez han sido atendidos. En algunos casos se puede admitir que los clientes abandonan el sistema si se cansan de esperar. El término "cliente" se usa con un sentido general y no implica que sea un ser humano, puede significar piezas esperando su turno para ser procesadas o una lista de trabajo esperando para imprimir en una impresora en red.

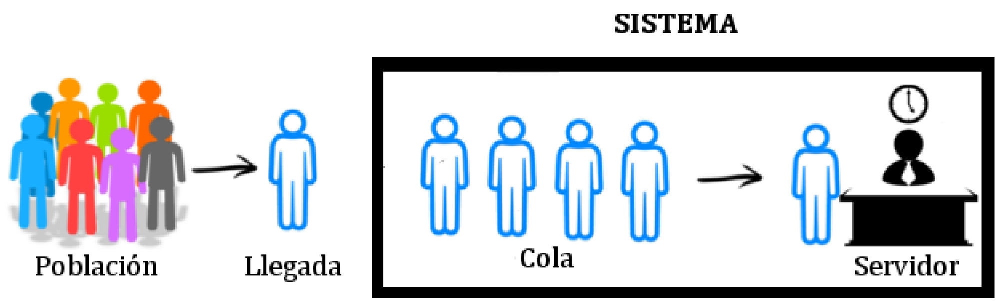

Figura 1: Sistema de Cola Básico

Aunque la gran parte de los sistemas se puedan representar como en la figura 1, debe quedar claro que una representación detallada exige definir un número elevado de parámetros y funciones.

La teoría de colas fue originariamente un trabajo práctico. La primera aplicación de la que se tiene noticia es del matemático danés Erlang sobre conversaciones telefónicas en 1909, para el cálculo de tamaño de centralitas. Después se convirtió en un concepto teórico que consiguió un gran desarrollo, y desde hace unos años se vuelve a hablar de un concepto aplicado aunque exige un importante trabajo de análisis para convertir las fórmulas en realidades, o viceversa. Se recomienda la lectura de [2, 3].

7.1.1. Características de un Sistema de Colas

Las características básicas que se deben utilizar para describir adecuadamente un sistema de colas son 6, las cuales se describen a continuación:

1. Patrón de llegada de los clientes.
2. Patrón de servicio de los servidores.
3. Cantidad de servidores en paralelo $(1, 2, 3, ...)$.
4. Disciplina de cola.

5. Cantidad máxima (finita o infinita) admisible en el sistema (en la cola más en servicio).

6. Tamaño de la fuente (finito o infinito).

Patrón de llegada de los clientes:

En situaciones de cola habituales, la llegada es estocástica, es decir la llegada depende de una cierta *variable aleatoria*, en este caso es necesario conocer la *distribución probabilística* entre dos llegadas de cliente sucesivas. Además habría que tener en cuenta si los clientes llegan independiente o simultáneamente. En este segundo caso (es decir, si llegan lotes) habría que definir la distribución probabilística de éstos.

También es posible que los clientes sean "impacientes". Es decir, que lleguen a la cola y si es demasiado larga se vayan, o que tras esperar mucho rato en la cola decidan abandonar.

Por último es posible que el patrón de llegada varíe con el tiempo. Si se mantiene constante le llamamos estacionario, si por ejemplo varía con las horas del día es no-estacionario.

Patrón de servicio de los servidores:

Los servidores pueden tener un tiempo de servicio variable, en cuyo caso hay que asociarle, para definirlo, una función de probabilidad. También pueden atender en lotes o de modo individual.

El tiempo de servicio también puede variar con el número de clientes en la cola, trabajando más rápido o más lento, y en este caso se llama patrones de servicio dependientes. Al igual que el patrón de llegadas el patrón de servicio puede ser no-estacionario, variando con el tiempo transcurrido.

Cantidad de servidores en paralelo:

Dentro del sistema, no necesariamente la fila es única, es posible que se atiendan de manera simultánea a varios clientes, esto sucede en sistemas con múltiples servidores en paralelo. Estos son los casos más usuales dentro de los servicios en las áreas financieras.

En la figura 1 se dibujó un sistema mono-canal, en la figura 2 se presenta dos variantes de sistema multicanal. El primero tiene una sóla cola de espera, mientras que el segundo tiene una sola cola para cada canal o servidor.

Disciplina de cola:

La disciplina de cola es la manera en que los clientes se ordenan en el momento de ser servidos de entre los de la cola. Cuando se piensa en colas se admite que la disciplina

Figura 2: Sistemas de colas multi-canal

de cola normal es FIFO (atender primero a quien llegó primero). Sin embargo en muchas colas es habitual el uso de la disciplina LIFO (atender primero al último).

También es posible encontrar reglas de secuencia con prioridades, como por ejemplo secuenciar primero las tareas con menor duración o según tipos de clientes.

Cantidad máxima del sistema:

En algunos sistemas existe una limitación respecto al número de clientes que pueden esperar en la cola. A estos casos se les denomina situaciones de cola finitas. Esta limitación puede ser considerada como una simplificación en la modelización de la impaciencia de los clientes.

Tamaño de la fuente:

Es de donde provienen los clientes. Puede ser finita o infinita.

Las anteriores características bastan, de modo general, para describir cualquier proceso. Evidentemente se puede encontrar una gran cantidad de problemas distintos y, por tanto, antes de comenzar cualquier análisis matemático se debería describir adecuadamente el proceso atendiendo a las anteriores características.

Una elección equivocada del modelo lleva a unos resultados erróneos, y en muchos casos no analizar adecuadamente nos puede llevar a pensar que el sistema no es posible de modelar.

7.1.2. Notación Básica

Las notaciones normales o estándar para representar los patrones de llegadas y de salidas (variables 1 y 2) son:

- M = Distribución de Markov (o de Poisson) de las llegadas o de las salidas (o lo que es igual, distribución exponencial del tiempo entre llegadas o tiempo de servicio).
- D = Tiempo constante (determinístico).
- E_k = Distribución de Erlang o gamma del tiempo (o bien, la suma de distribuciones exponenciales independientes).
- GI = Distribución general del tiempo entre llegadas.
- G = Distribución general del tiempo de servicio.

La cantidad de servidores (variable 3), generalmente se representa con el símbolo c, dónde c puede asumir valores entre 1 e infinito.

Entre la notación de disciplinas de cola (variable 4) están:

- $PLPS$ = Primero en llegar, primero en ser servido.
- $ULPS$ = Último en llegar, primero en ser servido.
- $SEOA$ = Servicio en orden aleatorio.
- DG = Disciplina en general (es decir, cualquier tipo de disciplina).

Para las variables 5 y 6 se definen valores numéricos, finitos o infinitos.

La notación que se asumirá para describir las características de un sistema de colas de manera general, será la *Notación Kendall*, la cual tiene la siguiente estructura:

Distribución de llegadas/Distribución de Tiempos de Servicio/Número de Servidores

Por ejemplo, para denotar un sistema con tiempo de llegada de los clientes determinista, una distribución general para los tiempos de llegada y 5 servidores, la notación Kendall en este caso sería: $D/G/5$. Por otra parte, un sistema de colas denotado por $M/M/1$ representa un sistema con patrón de llegada de los clientes con distribución Markoviana (con distribución de Poisson), una distribución también Markoviana en los tiempos de servicio (con distribución exponencial) y con un servidor en el sistema.

7.1.3. Medidas de Desempeño

Dentro de un sistema de colas, es necesario hacer ciertas mediciones, las cuales sirven para determinar no sólo el comportamiento, sino también el desempeño del sistema, éstas medidas de interés se definen a continuación:

- n = Número de clientes en el sistema en un determinado momento.
- λ_n = Frecuencia de llegadas por unidad de tiempo cuando hay n clientes en el sistema.
- μ_n = Frecuencia de salida cuando hay n clientes en el sistema.
- p_n = Probabilidad de estado estable de que haya n clientes en el sistema.
- c = Número de servidores en paralelo.
- $\rho = \dfrac{\lambda}{c \cdot \mu}$: Congestión de un sistema con parámetros: λ, c, μ.
- $\dfrac{1}{\lambda}$ = Tiempo entre llegadas.
- $\dfrac{1}{\mu}$ = Tiempo entre servicios.
- L_s = Cantidad esperada de clientes en el *sistema.*
- W_s = Tiempo promedio que se mantiene un cliente en el *sistema.*
- L_q = Cantidad esperada de clientes en la *cola.*
- W_q = Tiempo promedio que se mantiene un cliente en la *cola.*
- $\bar{c}$ = Cantidad esperada de servidores ocupados.

Observe que, para las medidas que se plantean, los datos relacionados a λ_n y μ_n se pueden obtener de manera directa del sistema. Pero, determinar una función de probabilidad p_n que nos brinde un aproximado de los clientes en el sistema requiere trabajo matemático especializado.

En primer lugar, se puede obtener *modelo general* de cola donde se combinan llegadas y salidas, basándose en las hipótesis de Poisson: los tiempos entre llegadas y de servicio tienen una distribución exponencial. El modelo general es la base para deducir modelos de Poisson especializados y específicos.

El modelo generalizado define a p_n como función de λ_n y μ_n, donde se asume que el sistema alcanza un **estado estable** a largo plazo, donde el número de llegadas es igual al número de salidas. Con esas premisas, se construye una función de probabilidad y después se usan esas probabilidades para determinar las medidas de funcionamiento del sistema, como la longitud promedio de la cola, el tiempo promedio de espera y la utilización promedio de la instalación.

A continuación se brinda el procedimiento para la obtención de la función de probabilidad general p_n.

En primer lugar, supongamos que se tiene un sistema discreto con infinitos estados, cuya frecuencia de llegada a cada estado es λ_i y su respectiva frecuencia de salida es μ_i, con $i = 0, 1, 2, 3, ...$

Se puede observar el diagrama de transiciones para este modelo en la figura 3.

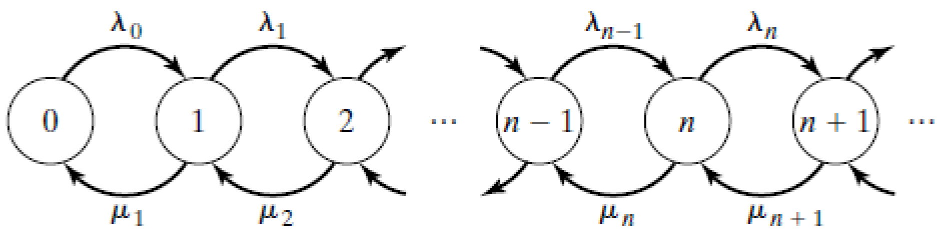

Figura 3: Diagrama de Transiciones

Bajo condiciones de estado estable, para $n > 0$, las tasas esperadas de flujo de entrada y salida del estado n deben ser iguales. Con base en el hecho que el estado n sólo puede cambiar a los estados $n-1$ y $n+1$, se obtiene:

$$\text{Tasa de entrada al estado } n = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}$$

Por otra parte,

$$\text{Tasa de salida de estado } n = (\lambda_n + \mu_n)p_n$$

Al igualar estas dos últimas expresiones, se obtiene la siguiente **ecuación de balance**:

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n, n = 1, 2, ...$$

En la figura 3, se puede observar que la ecuación de balance asociada a $n = 0$ es

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

De ésta última expresión podemos despejar p_1 obteniendo:

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) p_0$$

Las ecuaciones de balance se resuelven recursivamente en función de p_0.

Para $n = 1$ se tiene:

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1$$

De la última expresión se puede sustituir el valor conocido para p_1 y luego se despeja p_2 y se tiene:

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 &= (\lambda_1 + \mu_1)\left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) p_0 \\
\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 &= \left(\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1} + \lambda_0\right) p_0 \\
\mu_2 p_2 &= \left(\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1} + \lambda_0\right) p_0 - \lambda_0 p_0 \\
\mu_2 p_2 &= \left(\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1}\right) p_0 \\
p_2 &= \left(\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\right) p_0
\end{aligned}
$$

En general, se puede demostrar por inducción que p_n queda determinado de la siguiente manera:

$$p_n = \left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right) p_0 \tag{1}$$

Como p_n es una función de distribución de probabilidad, se cumplirá la siguiente relación:

$$\sum p_n = 1$$

Con ésta última ecuación, se puede deducir el valor de p_0.

Una vez definida p_n se pueden deducir el resto de medidas de desempeño. Recuerde que el sistema abarca tanto a la cola como a la instalación de servicio. Ahora se indicará cómo se deducen (en forma directa o indirecta) esas medidas a partir de la probabilidad p_n de estado estable de que haya n en el sistema. En forma específica:

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n \tag{2}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) p_n \tag{3}$$

Ahora, también se puede relacionar L_s con W_s y también L_q con W_q. Estas relaciones, se llaman relaciones de Little y son las siguientes:

$$L_s = \lambda_{ef} W_s \tag{4}$$

$$L_q = \lambda_{ef} W_q \tag{5}$$

En estas ecuaciones, el parámetro λ_{ef} es la tasa $efectiva$de llegada al sistema, ya que en algunos casos, un cliente llega al sistema y no significa que automáticamente pasa a ser parte de la cola.

También hay una relación directa entre W_s y W_q, ya que:

Tiempo de espera en el sistema = Tiempo de espera en la cola+Tiempo de espera en el servicio

Esto se traduce en términos matemáticos:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{6}$$

Multiplicando la última ecuación por λ_{ef} se obtiene:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$

Por definición, la diferencia entre la cantidad promedio en el sistema, L_s, y la cantidad promedio en la cola, L_q, debe ser igual a la cantidad promedio de servidores ocupados, c. Entonces,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{ef}}{\mu} \tag{7}$$

7.2. Diagnóstico del Sistema y Modelo Preliminar

En la Unidad de Colecturía de la UGB, brindan servicio dos cajeras y la fila de espera es única. También, el servicio es de tipo $PLPS$, por lo cual, en nuestro caso particular, se propone un modelo del tipo $M/M/2$ con el desarrollo de todas sus variables de interés y desempeño.

7.3. Análisis Estadístico

7.3.1. Población de Estudio y Muestra

Para poder desarrollar el modelo propuesto, es necesario tomar información directa de la población de estudio, en este caso, se desea medir el tiempo promedio de llegada de los clientes λ_n y también la frecuencia de salida (el promedio de tiempo de asistencia) del sistema μ_n. Para poder recolectar esta información, se debe fijar la población y determinar un tamaño de muestra válido para garantizar que el modelo sea lo más apegado a la realidad posible.

Con información brindada por la jefa de la Unidad de Colecturía, se tiene que en los días de saturación, se atienden en promedio alrededor de 500 estudiantes. Así que, la población que se toma como base es de 500.

Con esto, se calcula el tamaño de la muestra mediante la siguiente fórmula:

$$n = \frac{N \cdot Z^2 \cdot \sigma^2}{(N-1) \cdot e^2 + Z^2 \cdot \sigma^2}$$

donde:
n = Tamaño de la muestra que se desea calcular.
N = Tamaño de la población.
Z = Valor crítico asociado al nivel de confianza.
σ = Desviación estándar de la población.
e = Error muestral.

Para nuestro caso en específico, se tiene:
$N = 500$
$Z = 1.96$, Para un nivel de confianza del 95 %.
$\sigma = 0.5$, Desviación estimada, ya que se desconoce su valor exacto para la población.
$e = 6\,\%$, Error muestral tomado a conveniencia.

De esta forma, se tiene:

$$\begin{aligned} n &= \frac{500(1.96)^2(0.5)^2}{(500-1)(0.06)^2 + (1.96)^2(0.5)^2} \\ &= \frac{500(3.8416)(0.25)}{499(0.0036) + (3.8416)(0.25)} \\ &= \frac{480.2}{2.7568} \\ &\approx 174.19 \end{aligned}$$

Un valor aproximado para el tamaño de la muestra es de 174, pero por conveniencia, se tomará una muestra de 200 para capturar la información necesitada.

Con este tamaño de muestra se hicieron las observaciones para obtener los tiempos de llegada y de salida en el sistema.(Se adjunta el instrumento de medición en anexos).

7.4. Definición y Análisis del Modelo

7.4.1. Cálculo de medidas de Desempeño

Con la información obtenida, se aplicó una *prueba estadística de bondad de ajuste* para determinar que tipo de distribución probabilística seguían los datos, con lo cual se verificó que los datos siguen una distribución de Poisson. Se recomienda la lectura de [5, 6]

Por otra parte, con la tabulación y análisis estadístico de los datos se obtuvo un promedio para los tiempos de llegada de los estudiantes de:

$$\lambda_n = 1.17 \text{ clientes/minuto}$$

Y un tiempo promedio de atención en el sistema por los servidores de:

$$\mu_n = 3.045 \text{ clientes/minuto}$$

Como se puede observar a primera instancia, el tiempo de servicio es mayor al tiempo de llegada, por la tanto existirá una saturación en el sistema.

Al pasar los valores de λ_n y μ_n a una medición por hora se tiene:

$$\lambda_n = 60/1.17 = 51.282 \text{ clientes/hora}$$

$$\mu_n = 60/3.045 = 19.7 \text{ clientes/hora}$$

De esta forma, la congestión o saturación del sistema estará dada por:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{51.282}{2(19.7)} = 1.301573604$$

Este valor de saturación, significa que el sistema está sobresaturado, ya que se le exige trabajar a un 130 % de su capacidad, lo cuál de entrada no es conveniente.

Ya que en nuestro caso tenemos que $\rho > 1$, no es posible usar el modelo general de teoría de colas convencional, lo que nos obliga a usar un modelo especializado. Con el nuevo modelo se limitará el valor máximo posible de admisiones en el sistema. En nuestro caso, el valor máximo de personas en el sistema se estima de 50.

7.4.2. Modelo Ajustado

Para ajustar el modelo se utiliza la siguiente notación:

$$(a/b/c) : (d/e/f)$$

donde:
$a =$ Distribución de las llegadas.
$b =$Distribución de las salidas (o del tiempo de servicio).
$c =$ Cantidad de servidores en paralelo.
$d =$ Disciplina de la cola. $e =$ Cantidad máxima admisible en el sistema.
$f =$ Tamaño de la fuente o población.

De esta forma, el modelo especializado para nuestro caso de estudio será:

$$(M/M/2) : (DG/50/\infty)$$

Lo que implica que la tasa de llegada y de salida siguen una distribución exponencial (ya probado estadísticamente), hay dos servidores, la disciplina de la línea de espera es general, el límite máximo de personas en atención es de 50 y fuente de llegada puede considerarse muy grande (se aproxima a infinito).

De igual forma, se definen los valores para λ_n y μ_n como sigue:

$$\lambda_n = 60/1.17 = 51.282 \text{ clientes/hora}$$

$$\mu_n = 60/3.045 = 19.7 \text{ clientes/hora}$$

Con estos datos, se procede a determinar las medidas de desempeño mediante TORA (se remienda la lectura de [1]), obteniendo los siguientes resultados:

Lambda =	51.28000	Mu =	19.70000
Lambda eff =	39.39998	Rho/c =	1.30152
Ls =	46.68359	Lq =	44.68359
Ws =	1.18486	Wq =	1.13410

n	Probability, pn	Cumulative, Pn	n	Probability, pn	Cumulative, Pn
0	0.00000	0.00000	26	0.00041	0.00179
1	0.00000	0.00000	27	0.00054	0.00233
2	0.00000	0.00000	28	0.00070	0.00303
3	0.00000	0.00000	29	0.00091	0.00395
4	0.00000	0.00000	30	0.00119	0.00514
5	0.00000	0.00001	31	0.00155	0.00669
6	0.00000	0.00001	32	0.00202	0.00871
7	0.00000	0.00001	33	0.00263	0.01133
8	0.00000	0.00001	34	0.00342	0.01475
9	0.00000	0.00002	35	0.00445	0.01919
10	0.00001	0.00002	36	0.00579	0.02498
11	0.00001	0.00003	37	0.00753	0.03252
12	0.00001	0.00004	38	0.00981	0.04232
13	0.00001	0.00006	39	0.01276	0.05508
14	0.00002	0.00007	40	0.01661	0.07169
15	0.00002	0.00010	41	0.02162	0.09331
16	0.00003	0.00013	42	0.02814	0.12145
17	0.00004	0.00017	43	0.03662	0.15806
18	0.00005	0.00022	44	0.04766	0.20572
19	0.00007	0.00028	45	0.06203	0.26776
20	0.00009	0.00037	46	0.08074	0.34849
21	0.00011	0.00048	47	0.10508	0.45357
22	0.00014	0.00062	48	0.13676	0.59033
23	0.00019	0.00081	49	0.17800	0.76833
24	0.00024	0.00106	50	0.23167	1.00000
25	0.00032	0.00137			

Figura 4: Resultado en TORA para medidas de desempeño del sistema

Con estos datos, podemos analizar de forma directa las medidas de desempeño.

7.4.3. Análisis de las Medidas de Desempeño del Modelo Ajustado

Las variables de interés que describen el comportamiento y la eficiencia general del sistema se presentan a continuación:

- ρ : La saturación del sistema es aproximadamente de 130 %, por lo cual el tiempo de atención a los estudiantes crece exponencialmente. Esto se debe a que el sistema sobrepasa su capacidad en un 30 %. Cabe mencionar, que esto ocurre solamente en las fechas de pago para inscripción de materias al inicio de cada ciclo lectivo.
- λ_{ef} : La frecuencia efectiva de entrada al sistema es de aproximadamente 39.4 % lo que indica que no se atiende a un 60.6 % de la población general.
- L_s : Indica que en el sistema habrá un promedio de 46.7 estudiantes de los 50 posibles para atender.
- L_q : Indica que haciendo fila existirá un promedio de 44.7 personas. Lo que tiene sentido, ya que en la fila habrán 44.7 y en los servidores 2, al sumar 44.7+2 da como resultado el promedio esperado de personas en el sistema.
- W_s : Indica el tiempo que en promedio debe esperar un estudiante en el sistema, desde que entra a la fila hasta que sale del servicio. Este valor, según la tabla corresponde a 1.18486, que en realidad es una medida en términos de horas, ya que nuestra unidad de medida es $clientes/hora$. De esta forma, al hacer la conversión a minutos, se tiene que 1.18486 horas en minutos es aproximadamente 71. Es decir que el tiempo promedio de espera en la colecturía es de 1 hora con 11 minutos.
- W_q : Esta variable nos indica el tiempo promedio de espera en la cola, antes de ser atendidos. Este valor corresponde a 1.1341 horas . Al realizar esta conversión a minutos, se tiene que en la cola se espera un aproximado de 1 hora con 8 minutos.
- p_n : Nos indica la distribución de probabilidad para el número de personas posibles en el sistema en un momento dado. Observe que para n de 0 a 10 su respectiva probabilidad es cero, por lo tanto se puede inferir que el sistema nunca estaría vacío bajo estas condiciones, ya que habrán siempre en el sistema al menos diez personas. Por otra parte, el valor donde la probabilidad se vuelve más alta es para $n = 50$, esto indica que generalmente el sistema se encontrará totalmente lleno al límite de su capacidad.

Con la descripción e interpretación de estas variables, se concluye con el análisis y desempeño del sistema.

De manera preliminar, se puede inferir que el sistema esta sobresaturado y no da abasto a la población estudiantil en las fechas de mayor demanda.

8. Desarrollo de la Simulación

8.1. Simulación del Sistema bajo el Modelo Ajustado

De entrada, se establece que se usará una herramienta de software para la construcción y análisis de las simulaciones. El software que se utilizará en este caso es Promodel Student 2016, versión 9.3 (se recomienda la lectura de [7]), el cuál tiene dentro de sus ventajas, que es de libre uso.

Para poder desarrollar una simulación en Promodel Student, hay que tener en cuenta lo siguiente:

1. Los elementos que componen el modelo han de ser perfectamente definidos, libres de ambigüedades, ya que el programa antes de hacer la simulación comprueba la definición y corrección del modelo.

2. El modelo debe contener al menos los siguientes elementos:

   - Locaciones.
   - Entidades.
   - Arribos.
   - Procesos.

La simulación en Promodel, no es más que la visualización en un entorno gráfico de las relaciones entre los elementos del sistema siguiendo una lógica definida.

En nuestro caso en específico, se considera lo siguiente:

- **Locaciones:** Se consideran dos locaciones para el modelos, las cuales serán la fila de espera y los servidores de atención, en este caso las dos cajas de colecturía. La configuración de las locaciones en Promodel se muestra en la figura 5. También observe que se agregó una escala y un contador para la fila de espera, con el objetivo de poder visualizar la saturación en el sistema, de igual forma se agregó un contador para ver el número de clientes que se atienden en las cajas.

- **Entidades:** Solamente los estudiantes que llegan a hacer el proceso a colecturía.

- **Arribos:** En este caso, los arribos se definen por los estudiantes, con una frecuencia de llegada de 1.17 minutos. Puede observar la configuración de los arribos en la figura 6.

- **Procesos:** Se definen dos procesos, el primero pasar de la fila de espera a las cajas de atención y el segundo pasar de la caja de atención a la salida del sistema. El tiempo en la caja se configura en una espera promedio de 3.045 minutos. Puede observar la configuración de los procesos en la figura 7.

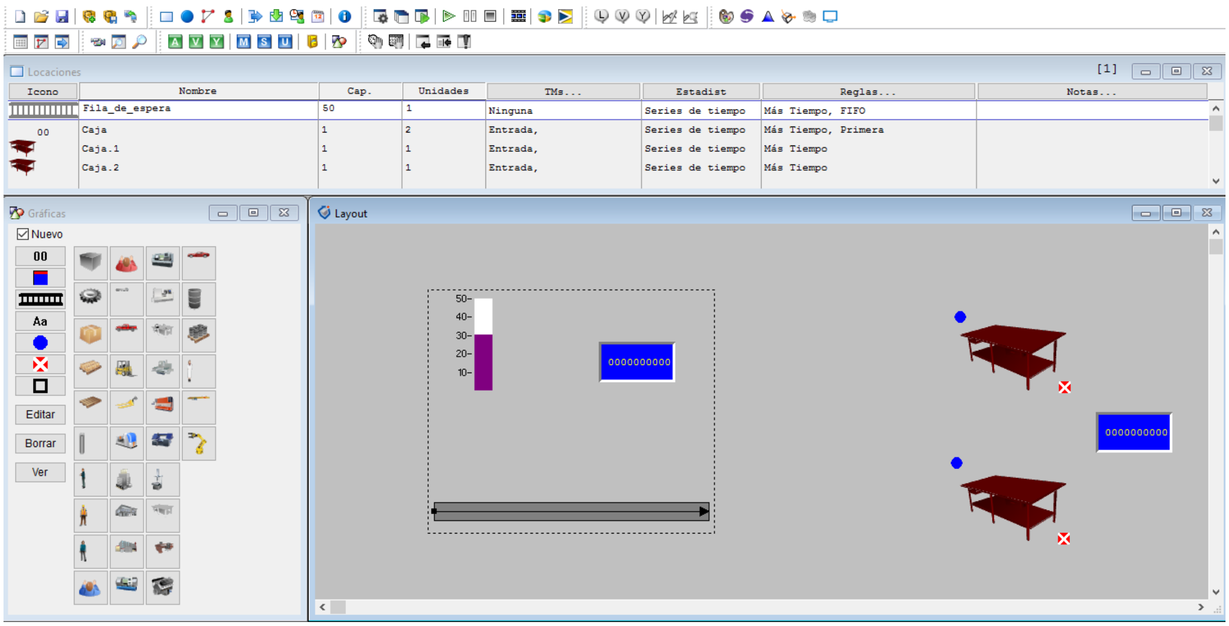

Figura 5: Configuración de Locaciones del modelo.

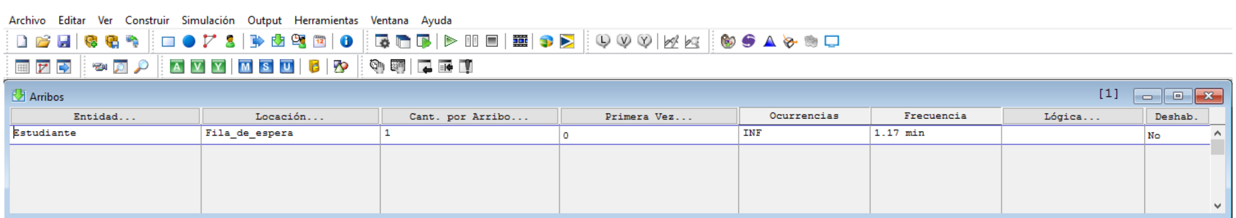

Figura 6: Configuración de llegada de los estudiantes.

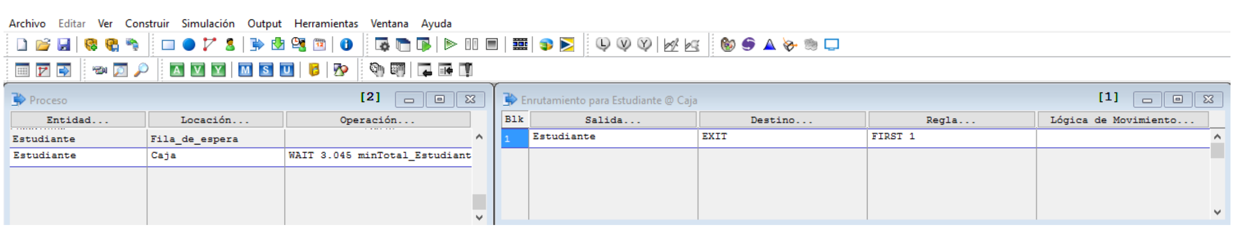

Figura 7: Configuración de los procesos.

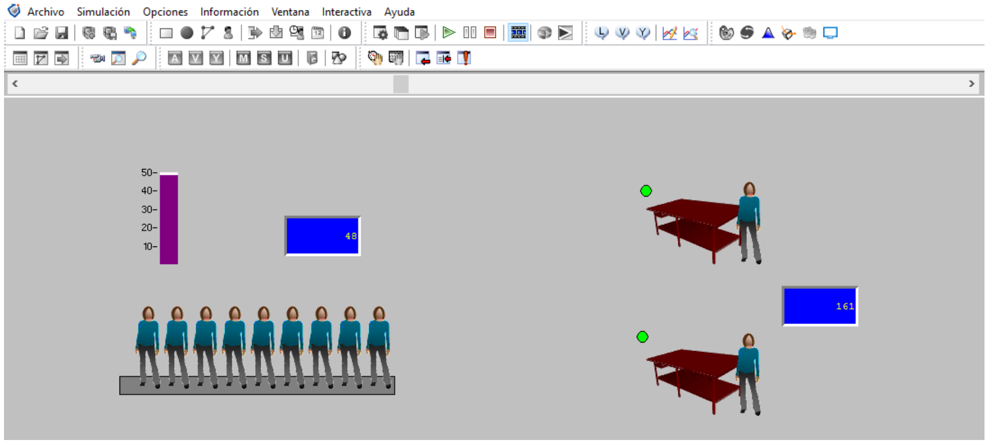

Figura 8: Simulación en proceso del sistema.

Con estas configuraciones se hace la simulación, la cual se puede observar su corrida en la figura 8.

Al finalizar la simulación, el programa muestra el mensaje de la figura 9. Lo que indica que el sistema rechaza algunas de las entradas o arribos de estudiantes, ya que está sobresaturado y sobre pasa su capacidad.

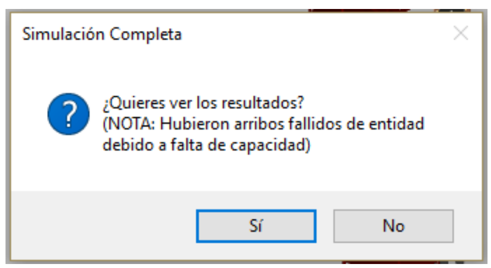

Figura 9: Mensaje al finalizar la simulación.

Al ver los resultados de la simulación se obtienen los datos que se muestran en la figura 10.

Es necesario tomar en cuenta que el modelo se procesa bajo la condición que el sistema funciona a una capacidad del 100 % (máximo admisible para procesar en el programa), aunque de la fase de análisis se sabe que el modelo sobrepasa su capacidad. Se procede a analizar los datos de los resultados de la siguiente manera:

- **Cuadro Entidad-Estados:** Este cuadro indica el porcentaje de estudiantes en el sistema en relación a la actividad que desarrollan. Se observa que cerca del 91 % de los estudiantes en el sistema se encuentran en espera para ser atendidos. Existe cerca de un 6 % que se encuentran en atención y el porcentaje restante son los rechazados ya que sobrepasan la capacidad.

- **Cuadro de Indicadores:** En este cuadro se muestra que un estudiante en promedio se tarda 55.77 minutos en la fila de espera y se tarda en promedio 3.34 minutos en la

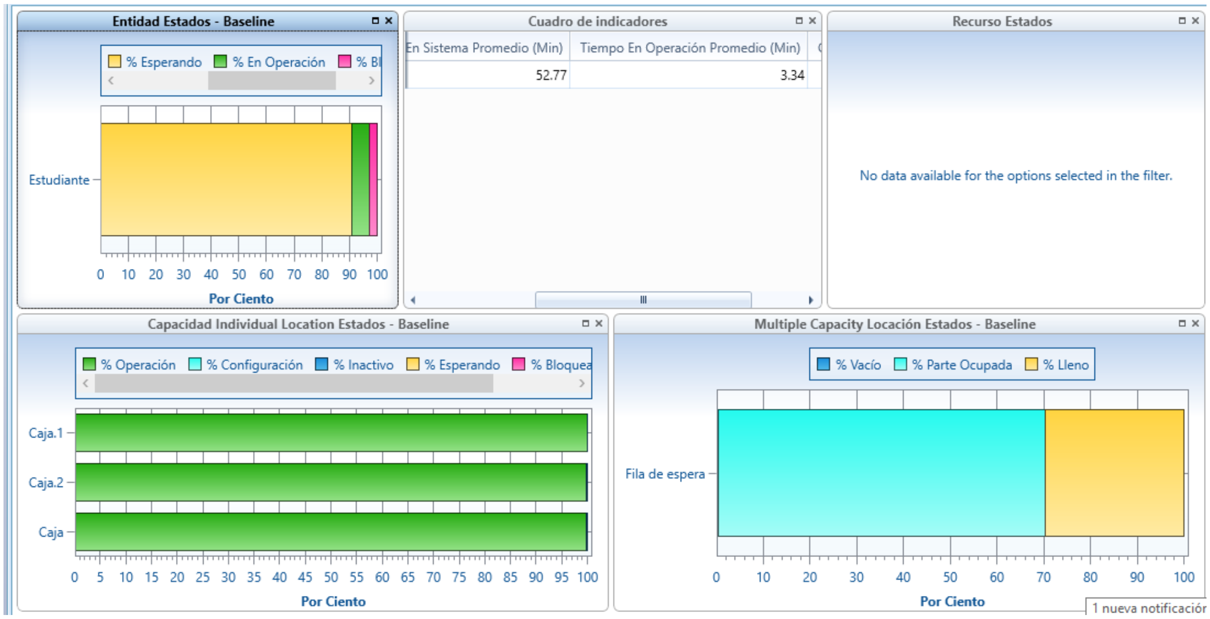

Figura 10: Resultados de la simulación

atención. Esto en base a una saturación del 100 %. Es decir que el tiempo promedio total en el sistema es de $55.77 + 3.34 = 59.11$ minutos.

- **Cuadro de Capacidad Individual:** Esta gráfica nos muestra el porcentaje de ocupación de las cajas, se observa que las cajas se encuentran ocupadas al 100 %.
- **Cuadro Multiple Capacity:** Este cuadro nos muestra que tan lleno se encuentra el sistema. Observe que el sistema no se encuentra vacío nunca. En un 70 % se encuentra ocupado y en un 30 % se encuentra completamente lleno a su máxima capacidad.

Estos datos de la simulación, reafirman el análisis hecho en la fase previa. En la siguiente sección, se simularán múltiples escenarios con modificaciones a las variables del sistema, con el objeto de determinar el desempeño del sistema bajo condiciones diferentes.

8.2. Simulación del Sistema en Múltiples Escenarios

Para poder ver de forma directa las modificaciones al sistema en base a las modificaciones de sus variables, se realizan diversas simulaciones en escenarios diferentes, esto con el afán de observar el comportamiento del sistema e inferir una solución óptima para tiempos y costos del sistema.

En primer lugar, si se quiere mejorar los tiempos de atención, la solución más inmediata es agregar más servidores al sistema. Para ello, se analizan las medidas de desempeño del sistema bajo modificaciones a la variable c.

8.2.1. Funcionamiento del Sistema con 3 servidores

En la figura 11, se muestran los resultados de TORA para el sistema en base a tres servidores, es decir, se le agrega un servidor más al sistema y se analiza su comportamiento.

Lambda =	51.28000	Mu =	19.70000
Lambda eff =	51.28000	Rho/c =	0.86768
Ls =	7.59100	Lq =	4.98796
Ws =	0.14803	Wq =	0.09727

n	Probability, pn	Cumulative, Pn	n	Probability, pn	Cumulative, Pn
0	0.03424	0.03424	34	0.00124	0.99190
1	0.08912	0.12336	35	0.00107	0.99297
2	0.11600	0.23936	36	0.00093	0.99390
3	0.10065	0.34000	37	0.00081	0.99471
4	0.08733	0.42733	38	0.00070	0.99541
5	0.07577	0.50311	39	0.00061	0.99601
6	0.06575	0.56885	40	0.00053	0.99654
7	0.05705	0.62590	41	0.00046	0.99700
8	0.04950	0.67540	42	0.00040	0.99740
9	0.04295	0.71835	43	0.00034	0.99774
10	0.03727	0.75562	44	0.00030	0.99804
11	0.03234	0.78796	45	0.00026	0.99830
12	0.02806	0.81601	46	0.00023	0.99852
13	0.02434	0.84036	47	0.00020	0.99872
14	0.02112	0.86148	48	0.00017	0.99889
15	0.01833	0.87981	49	0.00015	0.99904
16	0.01590	0.89571	50	0.00013	0.99916
17	0.01380	0.90951	51	0.00011	0.99927
18	0.01197	0.92149	52	0.00010	0.99937
19	0.01039	0.93187	53	0.00008	0.99945
20	0.00901	0.94089	54	0.00007	0.99953
21	0.00782	0.94871	55	0.00006	0.99959
22	0.00679	0.95550	56	0.00005	0.99964
23	0.00589	0.96139	57	0.00005	0.99969
24	0.00511	0.96649	58	0.00004	0.99973
25	0.00443	0.97093	59	0.00004	0.99977
26	0.00385	0.97477	60	0.00003	0.99980
27	0.00334	0.97811	61	0.00003	0.99982
28	0.00290	0.98101	62	0.00002	0.99985
29	0.00251	0.98352	63	0.00002	0.99987
30	0.00218	0.98570	64	0.00002	0.99989
31	0.00189	0.98759	65	0.00002	0.99990
32	0.00164	0.98924	66	0.00001	0.99991
33	0.00142	0.99066	67	0.00001	0.99993

Figura 11: Desempeño del sistema con tres servidores

se observa que el sistema sufre una modificación bastante grande en su desempeño. Al analizar estos datos, se obtiene que:

- ρ : La saturación del sistema es aproximadamente de 86.8 %, lo que implica que con tres servidores el sistema se vuelve eficiente.
- λ_{ef} : La frecuencia efectiva es igual a la de entrada, lo que implica que se atiende a toda la población.

- L_s : Indica que en el sistema habrá un promedio de 7.59 estudiantes. La cuál es una diferencia significativa con relación al sistema con dos servidores que en promedio tenía 46.7.
- L_q : Este valor muestra que en promedio habrá un aproximado de 5 personas en la fila.

- W_s : La tabla nos da un valor de 0.148, al multiplicarlo por 60 se obtiene un aproximado de 8.9 minutos de espera en el sistema.
- W_q : La tabla muestra un valor de 0.067 que al traducirlo en minutos se tiene que en la fila un estudiante se tardará en promedio 5.82 minutos.

Por otra parte, también se realiza la simulación del modelo con tres servidores en Promodel, obteniendo los resultados que se muestran en la figura 12. Estos resultados, nos reafirman el hecho de que el sistema se vuelve eficiente con tres servidores.

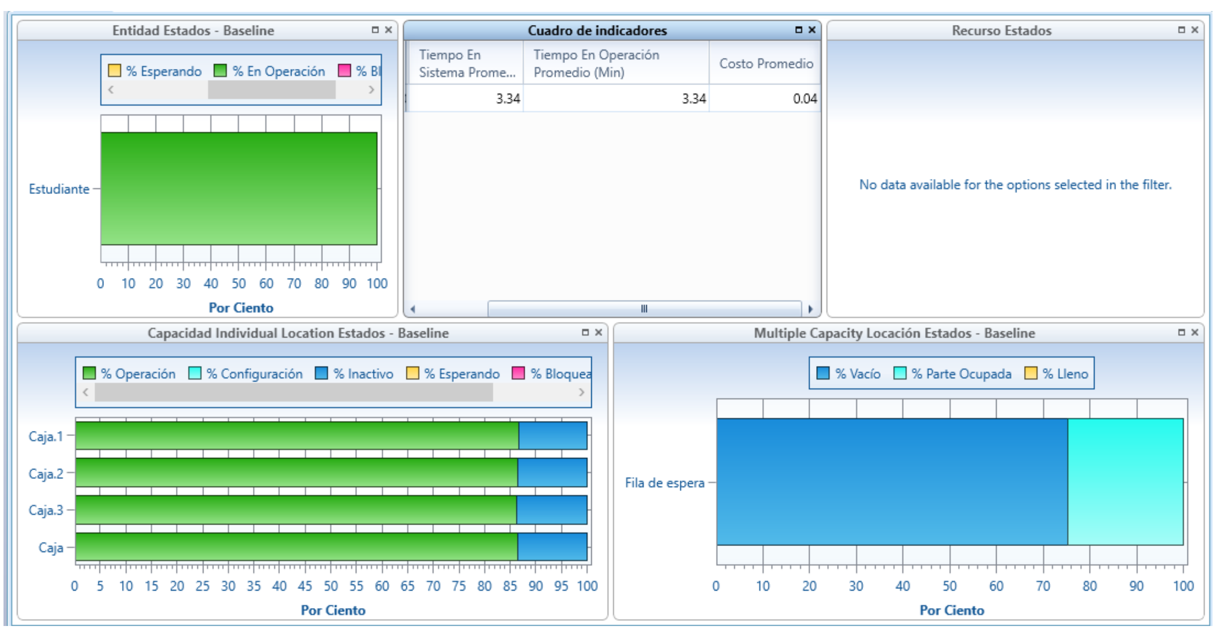

Figura 12: Resultados de simulación del sistema con tres servidores

Observe que, según las gráficas de la figura 12, el sistema se mantiene en operación el 100 % del tiempo pero no se acumulan esperas. También en la simulación el tiempo de espera se reduce a 3.34 minutos para todo el sistema, observe que las cajas están ocupadas aproximadamente un 86 % (lo cual equivale a ρ del análisis matemático). Por último se observa que el sistema pasa vacío o disponible para atención un 75 % y permanece ocupado un 25 %. Observe que el sistema no se satura ni se llena.

8.2.2. Funcionamiento del sistema para 4 servidores

En la figura 13, se muestran los resultados en TORA para el análisis del sistema con 4 servidores.

Lambda =	51.28000	Mu =	19.70000
Lambda eff =	51.28000	Rho/c =	0.65076
Ls =	3.26548	Lq =	0.66243
Ws =	0.06368	Wq =	0.01292

n	Probability, pn	Cumulative, Pn	n	Probability, pn	Cumulative, Pn
0	0.06490	0.06490	13	0.00260	0.99516
1	0.16894	0.23384	14	0.00169	0.99685
2	0.21988	0.45372	15	0.00110	0.99795
3	0.19078	0.64450	16	0.00072	0.99867
4	0.12415	0.76865	17	0.00047	0.99913
5	0.08079	0.84945	18	0.00030	0.99943
6	0.05258	0.90203	19	0.00020	0.99963
7	0.03422	0.93624	20	0.00013	0.99976
8	0.02227	0.95851	21	0.00008	0.99984
9	0.01449	0.97300	22	0.00005	0.99990
10	0.00943	0.98243	23	0.00004	0.99993
11	0.00614	0.98857	24	0.00002	0.99996
12	0.00399	0.99256	25	0.00001	0.99997

Figura 13: Desempeño del sistema con cuatro servidores

Con estos datos, se observa que la tasa efectiva es igual a lambda. Se tiene que la saturación del sistema es de un 65 %. En promedio habrán 3.27 estudiantes en el sistema y en la cola en promedio habrán 0.66 estudiantes, es decir, con 4 servidores el sistema generalmente pasará vacío. Haciendo las conversiones a minutos para W_s y W_q se obtiene que en promedio un estudiante se tarda 3.84 minutos en el sistema, y en la fila de espera se tarda un promedio de 0.78 minutos.

Los resultados para la simulación en Promodel para 4 servidores se muestran en la figura 14. Observe que, según las gráficas, el cajero 4 pasa inactivo el 100 % de su tiempo, esto nos indica que prácticamente no se necesita un cuarto cajero, ya que el modelo es eficiente con tres cajeros.

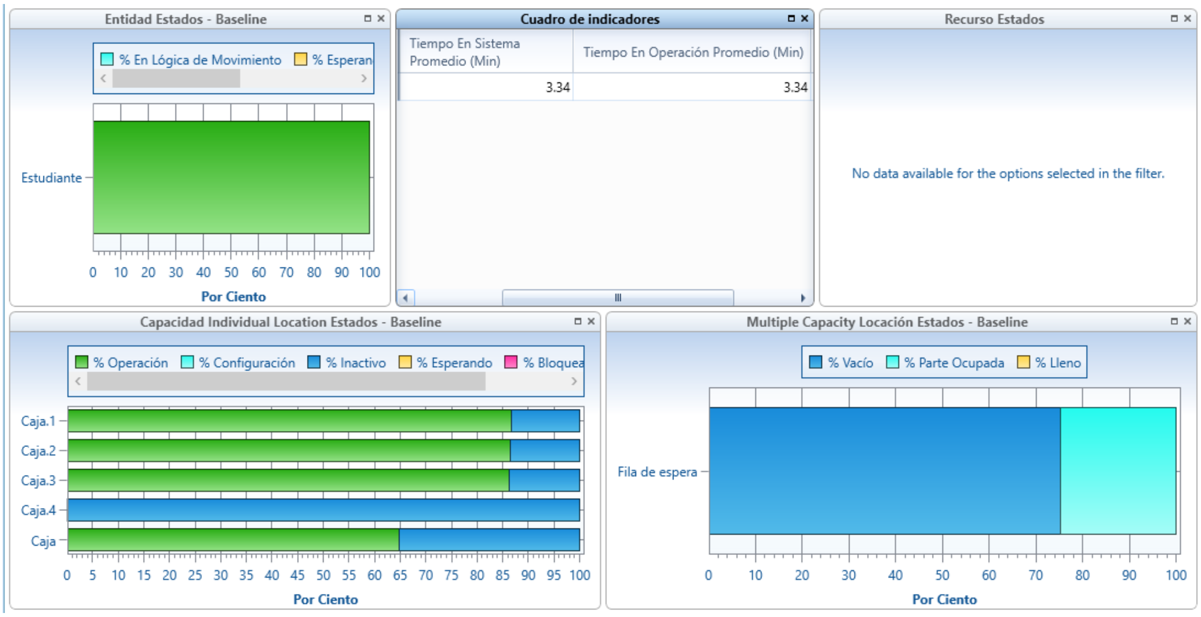

Figura 14: Resultados de simulación del sistema con cuatro servidores

9. Desarrollo de la Optimización

Esta sección se ocupa de brindar una solución óptima al sistema. La motivación principal es volver eficiente al sistema con el menor costo posible. Matemáticamente, esto significa *minimizar el tiempo de atención* y *minimizar los costos* de contratación de personal para atender a los estudiantes. Se recomienda la lectura de [8].

En este punto, se tiene bastante información de peso que permite tomar una decisión fundamentada en los resultados obtenidos en la sección anterior. Para los costos de servicio, se calcula (en base al salario de un servidor) que el costo por servicio por cada servidor es de $0.02 por minuto. Es decir que el costo dólares por minutos estará dado por:

$$S(c) = 0.02c$$

donde c, es el número de cajeros brindando el servicio.

Para observar como se comporta el tiempo de servicio, es evidente que entre más servidores, el tiempo de servicio disminuye, así que en vez de analizar directamente el tiempo, analizaremos la *pérdida* del sistema en base a sus servidores.

Se establece (de forma lógica), que el nivel óptimo para la eficiencia del sistema es del 100 %. Y se define que la pérdida se medirá mediante la siguiente fórmula:

$$\varepsilon = \mid \rho(c) - 100 \mid$$

donde, ε define la pérdida del sistema en función de la saturación del sistema que depende de la cantidad de servidores.

Después de observar los resultados matemáticos y los resultados de las simulaciones para diferentes escenarios del sistema, se muestran en la figura 15, los resultados matemáticos en TORA para 2, 3 y 4 servidores.

Scenario	c	Lambda	Mu	L'da eff	p0	Ls	Lq	Ws	Wq
1	2	51.28000	19.70000	39.39998	0.00000	46.68359	44.68359	1.18486	1.13410
2	3	51.28000	19.70000	51.28000	0.03424	7.59100	4.98796	0.14803	0.09727
3	4	51.28000	19.70000	51.28000	0.06490	3.26548	0.66243	0.06368	0.01292

Figura 15: Comparación del sistema para diferentes servidores

Además, al conocer el valor de ρ para $c = 1, 2$ y 3 podemos calcular el costo por servidor y su respectiva pérdida, lo cual se muestra en la tabla 16.

Número de Servidores c	Costo $S(c)$	Pérdida ε
2	$S(2) = 0.04\ dolar\ por\ minuto$	$\varepsilon = \|130 - 100\| = 30$
3	$S(3) = 0.06 dolar\ por\ minuto$	$\varepsilon = \|86.7 - 100\| = 13.3$
4	$S(4) = 0.08\ dolar\ por\ minuto$	$\varepsilon = \|65 - 100\| = 35$

Figura 16: Comparación costo-pérdida del sistema

Al graficar los datos, el costo versus la pérdida, se obtiene la siguiente gráfica de la figura 17. Con esto se garantiza, que la pérdida se minimiza cuando el costo es de 0.06, es decir que ***el punto óptimo se da cuando el número de servidores es 3***.

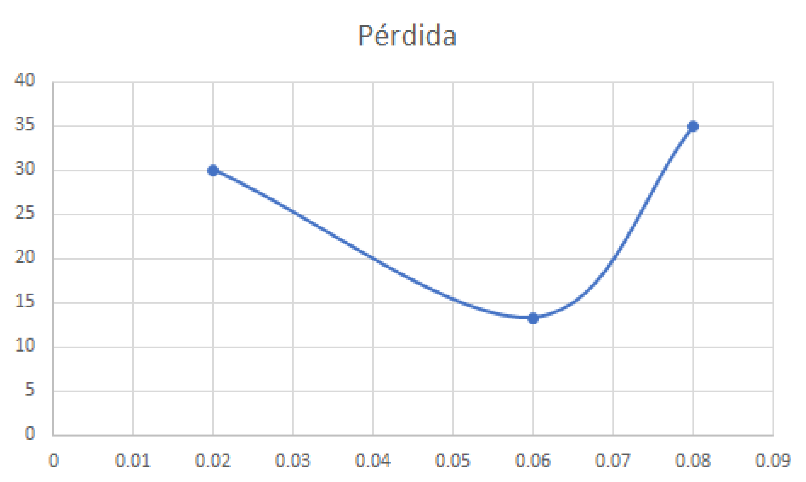

Figura 17: Gráfica de Costo versus Pérdida

10. Resultados

Con el desarrollo de la fase de análisis y de simulación se obtuvieron los siguientes resultados:

a. En primera instancia se comprobó que los datos que se tomaron para la muestra de tamaño 200 (medición de tiempos de llegada y tiempos de atención del sistema de colecturía UGB), siguen una distribución de Poisson, cumpliendo las condiciones necesarias para analizar el modelo en función de una distribución de Markov.

b. El modelo de análisis matemático basado en teoría de colas, que mejor se ajusta al sistema de Colecturía UGB, sede San Miguel, es el modelo especializado $(M/M/2) : (DG/50/\infty)$. En el cual se establece que las disciplina de llegada y de salida del sistema sigue una distribución de Markov (o de Poisson) (o lo que es igual, distribución exponencial del tiempo entre llegadas o tiempo de servicio), en el sistema funcionan dos servidores, se establece una disciplina general para la fila de espera, un límite de atención dentro de colecturía de 50 estudiantes y la población o fuente se considera infinita.

c. Bajo el análisis de las medidas de desempeño del sistema a través del modelo, se determina que el sistema de colecturía se encuentra saturado en las fechas específicas en las que se hace la medición de datos. La saturación del sistema es de $\rho = 130\,\%$, el promedio de llegada de los estudiantes es de $\lambda_n = 51.28$ estudiantes por hora y el promedio de atención a los estudiantes por parte de los servidores es de $\mu_n = 19.7$ por hora. En el sistema habrá un promedio de 46.7 estudiantes. Y el tiempo de espera promedio para un estudiante será de 1 hora con 11 minutos según el modelo matemático y de 59.11 minutos según la simulación. La colecturía pasará ocupada en un 70 %, completamente llena en un 30 % y nunca vacío.

d. Después de analizar el sistema mediante análisis matemático y mediante simulaciones de escenarios diferentes, el proceso de optimización muestra que el desempeño óptimo del sistema se logra cuando se trabaja con tres cajeros. Es decir, cuando el número de cajeros en el sistema es igual a tres, el sistema se vuelve eficiente, se minimiza la pérdida y bajo reducción aceptable en los costos de servicio.

11. Conclusiones y Recomendaciones

Después de desarrollar el análisis, simulación y optimización del sistema del colecturía UGB, se plantea lo siguiente:

a. Es de tomar en cuenta que el análisis de la colecturía UGB se realizó en fechas dónde la afluencia de estudiantes es mayor, es decir el modelo se analiza en condiciones de máxima afluencia de clientes.

   Por lo cual, la saturación del sistema no es permanente, sino que es temporal. Por este motivo, no se recomienda contratar de manera directa otro cajero para colecturía, más bien se recomienda que en las fechas específicas de saturación, se pida el apoyo por parte de la Unidad Financiera, para la apertura temporal de otro servidor, es decir, abrir una nueva caja de atención con una persona que brinde servicios de manera temporal, lo cual, permitirá volver el sistema más eficiente.

b. Si bien es cierto, el desarrollo del proyecto se centra en un sistema bien definido y delimitado, el proceso que se desarrolla en la investigación se puede replicar y aplicar para el análisis de cualquier otro sistema de la misma naturaleza. Justamente esa replicabilidad hace interesante el análisis de modelos de este tipo, ya que se puede aplicar el mismo proceso aquí descrito a otros niveles, por ejemplo, se puede analizar el sistema de administración académica, o se puede aplicar a otros sistemas dentro del ámbito de servicios, como el sistema de espera y servicio en un restaurante o filas de espera en un supermercado.

c. Los modelos que se plantean a través de la teoría de colas y los procesos de simulación, tienen como finalidad última mejorar los servicios de atención en una entidad específica. El objeto de todo esto, es brindar herramientas formales en la toma de decisiones, es decir, dejar de tomar decisiones al *libre albitrio* o por simples juicios de valor y por el contrario, cientifizar los procesos dentro de un sistema y tomar las decisiones en base a criterios de información científica. Es por ello, que se recomienda ampliamente la utilización y aplicación de estas teorías en otros sistemas, con el afán de volver las instituciones en general, más eficaces y eficientes.

12. Bibliografía

Referencias

[1] *Manual de Tora.*

[2] Frederick, H., and Lieberman, G. J. *Introduction to operations research.* MG Mc Graw Hill, 1982.

[3] Hamdy, T., et al. *Investigación de operaciones.* Pearson Educación, 2004.

[4] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., and Baptista Lucio, P. *Metodología de la investigación . México, DF.* México: McGraw Hill, 2010.

[5] Mendenhall, W. *Estadística Matemática Aplicada.* MG Mc Graw Hill, 2007.

[6] Triola, M. F. *Estadística.* Pearson Educación, 2004.

[7] Vega, A. *Simulación en Promodel.*

[8] Y., C. Simulation optimization: Methods and applications. *Winter simulation conference* (1997).

13. Anexos

13.1. Instrumento de Medición

Universidad Gerardo Barrios

Facultad de Ciencia y Tecnología

Instrumento de Medición para análisis con Teoría de Colas

Nombre del encuestador: ____

Fecha: ____________

Detalles de medición de tiempos de llegada y atención de usuarios en Colecturía UGB San Miguel.

N°	N° de cajas en atención	N° de usuarios en la cola	Tiempo de llegada a la cola	Tiempo de inicio de Atención	Tiempo de Término atención	Tiempo entre llegadas	Tiempo de atención	Observaciones
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								
35								
36								

13.2. Instalaciones de Colecturía UGB, San Miguel


UNIVERSIDAD GERARDO BARRIOS
CAJA 2
AVISO
CALENDARIZACIÓN DE PAGOS
CICLO II-2017